中国人民大學
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

第十一讲 时间序列数据的进一步讨论

叶紫薇
中国人民大学

一、平稳和弱相关时间序列

时间序列假定具有强限制性

- 严格外生性、同方差性和无序列相关性是非常苛刻的要求，特别是在时间序列背景下；统计推断取决于正态性假设的有效性
- 如果样本量很大，则需要更弱的假设
- **时间序列大样本分析**的一个关键要求是所讨论的**时间序列是平稳且弱相关的**

一、平稳和弱相关时间序列

平稳时间序列

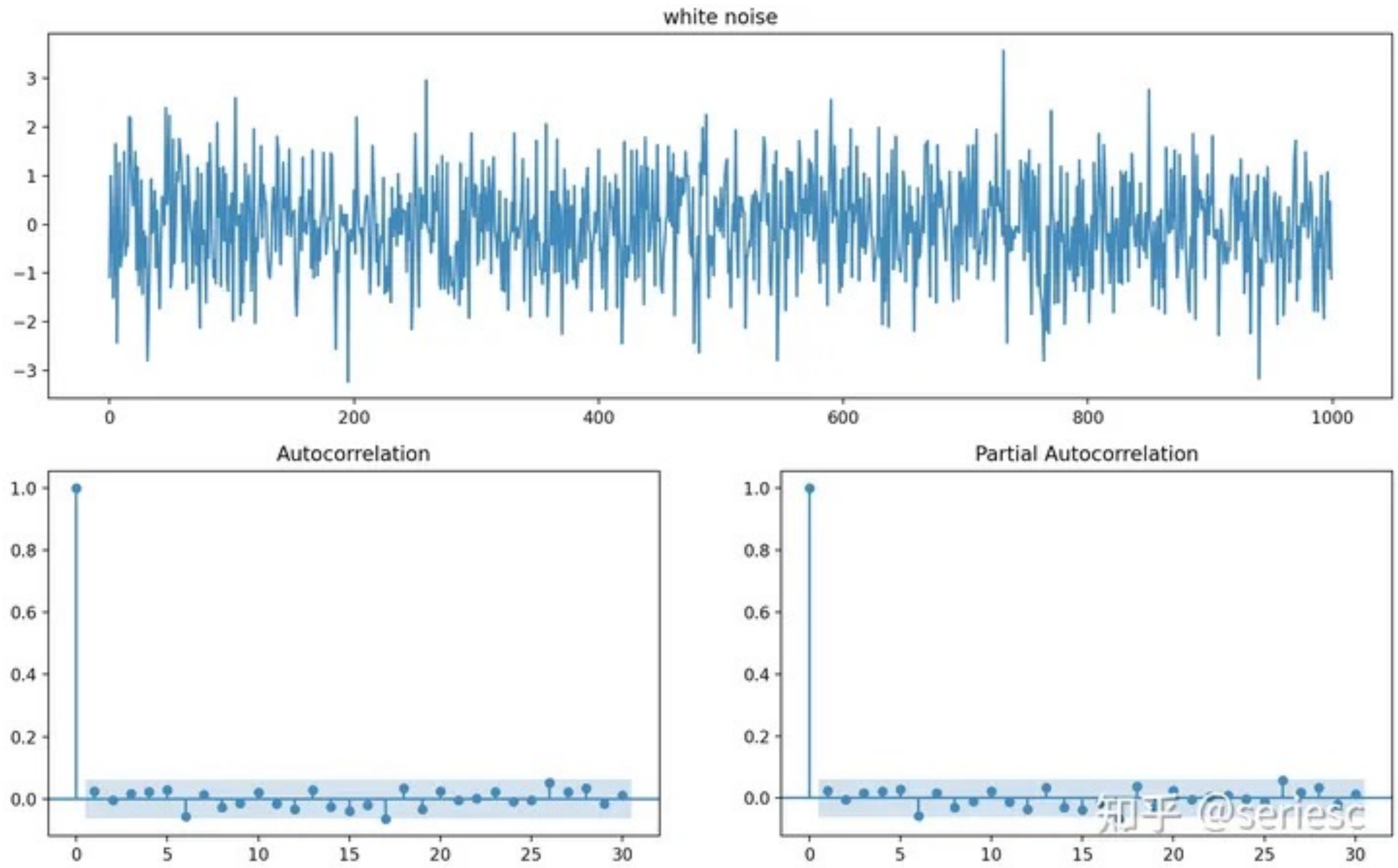
- 平稳性关系的概念：随机过程在时间推移过程中的联合分布
- 平稳随机过程（严格平稳、严平稳、“平稳性”）

平稳随机过程（stationary stochastic process）：对于随机过程 $\{x_t: t=1, 2, \cdots\}$，如果对于每一个时间指标集 $1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ 和任意整数 $h \geqslant 1$，$(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_m})$ 的联合分布都与 $(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \cdots, x_{t_m+h})$ 的联合分布相同，那么这个随机过程就是平稳的。

- 从时间序列中任取一个随机变量集，并把这个序列向前移动任意时期，其联合概率分布保持不变
- 平稳的时间序列的所有统计性质不随观测时间的变化而变化（例如：均值、方差，协方差，N阶距）
- 现实生活中的平稳过程？非平稳过程？

一、平稳和弱相关时间序列

平稳时间序列



一、平稳和弱相关时间序列

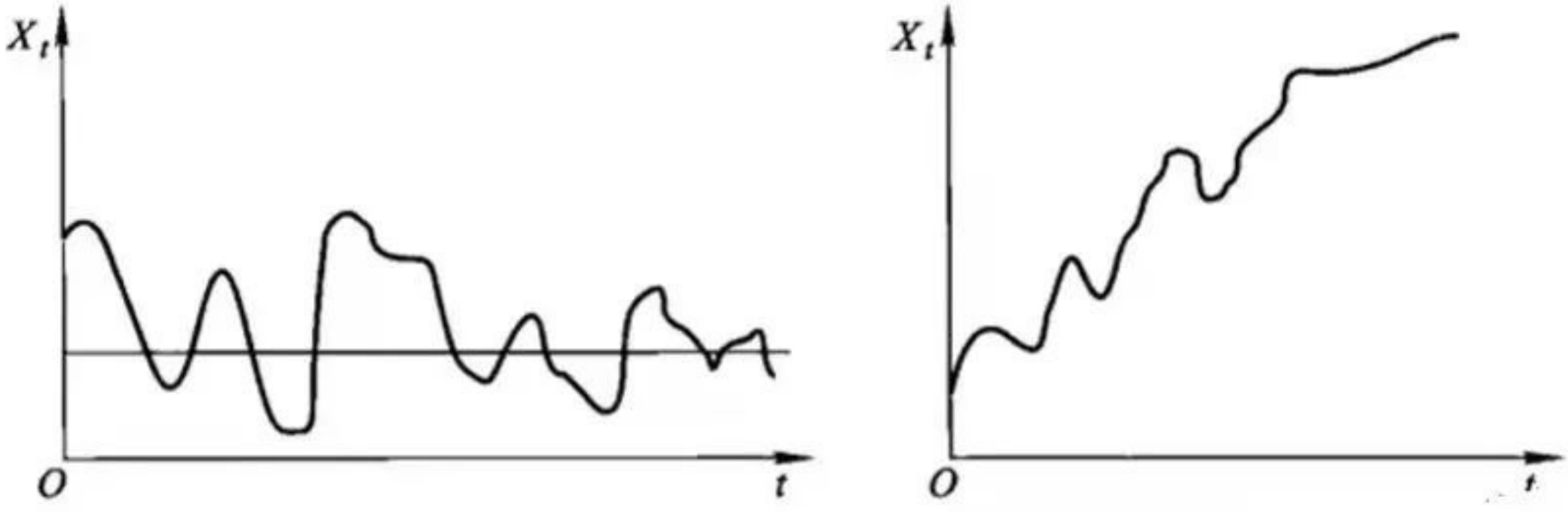
平稳时间序列

- **平稳性关系的概念：随机过程在时间推移过程中的联合分布**
- 协方差平稳过程（宽平稳、弱平稳）
  - 均值和方差均为常数（不随时间变化），且任意两项之间的协方差只取决于这两项之间的距离

协方差平稳过程（covariance stationary process）：对于一个具有有限二阶矩［$E(x_t^2)<\infty$］的随机过程｛x_t：$t=1$，2，…｝，若：(i) $E(x_t)$ 为常数；(ii) $Var(x_t)$ 为常数；(iii) 对任何 t，$h\geqslant 1$，$Cov(x_t, x_{t+h})$ 仅取决于 h，而不取决于 t。那它就是**协方差平稳的**（covariance stationary）。

一、平稳和弱相关时间序列

平稳时间序列



(a) (b)

一、平稳和弱相关时间序列

弱相关时间序列

- **平稳性关系的概念：随机过程在时间推移过程中的联合分布；随机变量之间的时间距离相同、随时间整体推移时，相关程度不变**
- **弱相关关系的概念：随着随机变量之间时间距离增加，两者相关程度减小**
- 对于平稳时间序列：

  若随着时间距离趋向无穷，两个随机变量之间近乎独立，则为弱相关时间序列
- 对于协方差平稳序列：

  若随着时间距离趋向无穷，两个随机变量之间的相关系数趋向于0，则为渐近无关的时间序列。

一、平稳和弱相关时间序列

弱相关的例子

- 独立同分布序列
- 一阶移动平均过程，MA(1)

et的均值为0，方差为常数，独立同分布

$$x_t = e_t + \alpha_1 e_{t-1},\ t = 1, 2, \ldots$$

序列中距离在两期或两期以上的变量之间无关。

- 一阶自回归过程，AR(1)

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + e_t,\ t = 1, 2, \ldots$$

该过程一定程度上延续前一时期的取值

$$\Rightarrow \quad Corr(y_t, y_{t+h}) = \rho_1^h$$

如果稳定性条件 $|\rho_1| < 1$ 成立，则该过程是弱相关的，因为随着观测值之间的距离增长到无穷大，序列相关性会收敛到零。

二、OLS的渐近（大样本）性质

OLS的一致性

- 假定 TS.1’（参数呈线性）：与假定 TS.1 相同，但现在假设因变量和自变量是平稳且弱相关的
- 假定 TS.2’（无完美共线性）：与假定 TS.2 相同
- 假定 TS.3’（同期外生性）：现在假设解释变量只是同期外生的而不是严格外生的，即 $E(u_t|\mathbf{x}_t)=0$
- 定理（OLS的一致性）：TS.1’-TS.3’下，OLS估计量是一致的

OLS的渐近正态性

- 假定 TS.4’（同方差）

$$Var(u_t|\mathbf{x}_t) = Var(u_t) = \sigma^2$$

- 假定 TS.5’（无序列相关）

$$Corr(u_t, u_s|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_s) = 0,\ t \neq s$$

- 定理（OLS的渐近正态性）：在假定 TS.1’ - TS.5’ 下，OLS 估计量呈渐近正态分布。此外，OLS 标准误差、t 统计量、F 统计量都是渐近有效的。
- 只要时间序列是弱相关的，大样本下的OLS统计推断在比经典线性模型假定更弱的假定下依然可靠。

二、OLS的渐近（大样本）性质

为何放松严格外生假设而仅假设同期外生?

- 严格外生性是一个严重的限制，因为它排除了解释变量和误差项（及因变量）之间的各种动态关系
- 排除了反馈机制：因变量对未来自变量的影响
- 排除了滞后影响：自变量对未来因变量的影响，尤其是因变量滞后期作为自变量的情况

二、OLS的渐近（大样本）性质

因变量滞后期作为自变量

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + u_t$$

存在滞后因变量的 OLS 估计
在同时期外生性下，OLS 是一致但有偏的

<u>同期外生性</u> $E(u_t|y_{t-1}) = 0$

<u>严格外生性</u> $E(u_t|y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$

严格的外生性意味着误差项与所有 yt, t=1, ··· , n-1 不相关

这会导致矛盾，因为：

$$Cov(y_t, u_t) = \beta_1 Cov(y_{t-1}, u_t) + Var(u_t) > 0$$

二、OLS的渐近（大样本）性质

例：有效市场假说

- 严格形式的有效市场假说（EMH）指出，在第 t 周之前市场可观察到的信息，应该对预测第 t 周的收益率没有帮助。

$$E(return_t | return_{t-1}, return_{t-2}, \ldots) = E(return_t)$$

- 检验 EMH 的一种简单方法是设定 AR(1) 模型。

$$\underset{}{\widehat{return}_t} = \underset{(.081)}{.180} + \boxed{\underset{(.038)}{.059}}\, return_{t-1}$$

$$n = 689, R^2 = .0035, \bar{R}^2 = .0020$$

高度持续性时间序列

- 在回归分析中使用趋势平稳序列
    - 具有确定性时间趋势的时间序列是非平稳的
    - 如果序列是弱相关的，且围绕着其时间趋势是平稳的，则称为趋势平稳过程(trend-stationary process)
    - 只要模型中对时间趋势进行适当控制，仍可用OLS估计
- 在回归分析中使用高度持续性（强相关）时间序列
    - 不幸的是，许多经济时间序列违反了弱相关性，因为它们具有高度持久性（=强相关）
    - 在这种情况下，OLS统计检验不再可靠，但在某些情况下，可以转变为弱相关

三、高度持续性时间序列

随机游走过程(Random walk)

该过程称为随机游走随机过程

$$\boxed{y_t = y_{t-1} + e_t,}\ t = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow\ y_t = (y_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \ldots = e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1 + y_0$$

t期的值是一个初始值与过去所有冲击的累加。这就是随机游走具有强相关性的原因：过去冲击的影响将永远包含在未来的序列中。

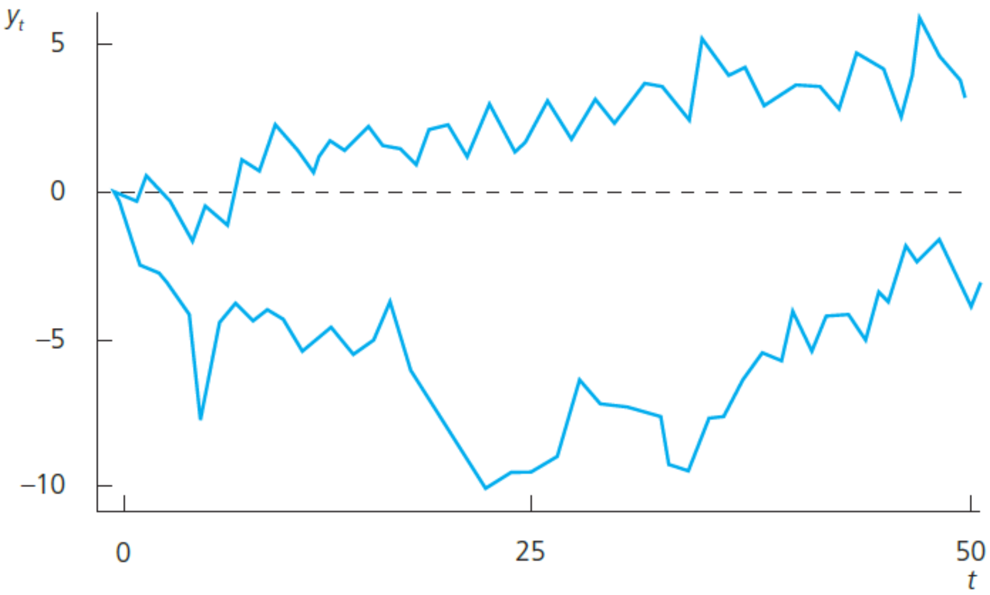
$$E(y_t) = E(y_0)$$

$$Var(y_t) = \sigma_e^2 t$$

$$Corr(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{t/(t+h)}$$

三、高度持续性时间序列

随机游走过程(Random walks)



- 随机游走的可能情况
- 随时间随机游走，没有明确的方向

三、高度持续性时间序列

带截距的随机游走(Random walk with drift)

$$y_t = \boxed{\alpha_0} + y_{t-1} + e_t, t = 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad y_t = \boxed{\alpha_0 t} + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1 + y_0$$

这导致了线性时间趋势，序列围绕该趋势遵循其随机游走行为。由于随机游走没有明确的发展方向，它也可能偏离趋势。

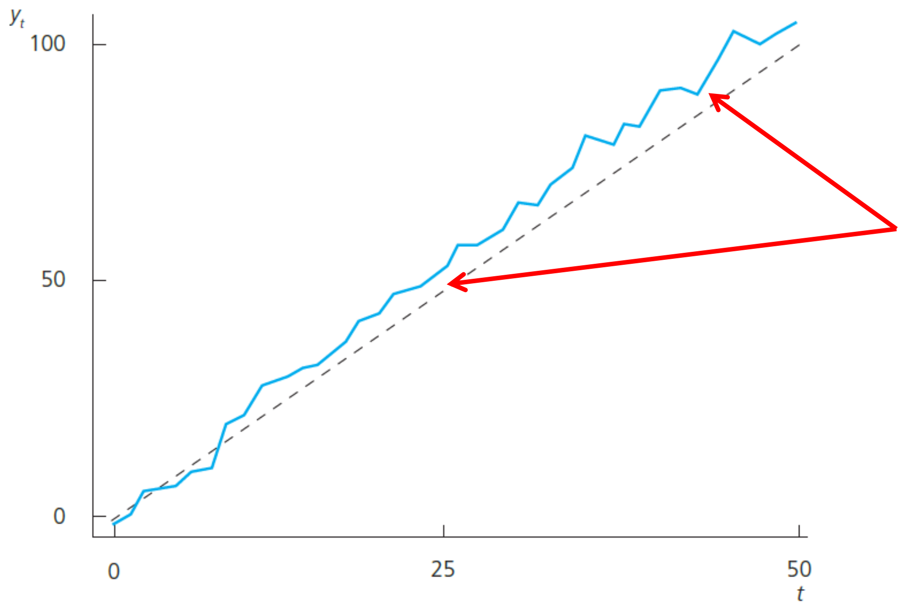
$$E(y_t) = \boxed{\alpha_0 t} + E(y_0)$$

$$Var(y_t) = \sigma_e^2 t$$

$$Corr(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{t/(t+h)}$$

三、高度持续性时间序列

带截距的随机游走(Random walk with drift)



Note that the series does not regularly return to the trend line.

Random walks with drift may be good models for time series that have an obvious trend but are not weakly dependent.

四、动态完备模型与无序列相关

动态完备模型

- 如果包含足够的滞后变量作为解释变量，以至于进一步包含解释变量和因变量的滞后无助于解释因变量，则称该模型是动态完备的：

$$E(y_t|\mathbf{x}_t, y_{t-1}, \mathbf{x}_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = E(y_t|\mathbf{x}_t)$$

- 动态完备性意味着不存在序列相关性
- 如果进一步滞后项实际上属于回归，则它们的遗漏将导致序列相关（如果变量是序列相关的）
- 如果不能排除滞后，则表明存在序列相关性

四、动态完备模型与无序列相关

序列外生性

- 序列外生性：

$$E(u_t|\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, ...) = E(u_t) = 0, t = 1, 2, ...$$

- 同期外生性弱于序列外生性，序列外生性弱于严格外生性
- 如果解释变量包含滞后因变量，则顺序外生性相当于动态完整性
- 所有回归模型都应该是动态完备的吗？
- 不一定：如果序列外生性成立，因果效应将被正确估计